J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
15 (1980) 355–363

ESPACES DE NULLITE DU TENSEUR DE COURBURE SUR LES FIBRES PRINCIPAUX

TONG VAN DUC

1. Homomorphisme caracteristique generalisé d'après F. Kamber et Ph. Tondeur

Pour plus de details, on se renvoie à [3].

Dans toute la suite (P, G, M) désigne un fibré principal de base M de groupe structural G dont l'algèbre de Lie est noteé $\mathfrak{g}$. On désigne par $A(P)$ (resp. $A(M)$) l'algèbre des formes différentielles sur P (resp. sur M).

Definition. Une connexion partielle sur (P, G, M) est un sous-fibré vectoriel H de TP tel que:

(1) $H_u \cap VP_u = \{0\}$ $\forall u \in P$, Où VP désigne le fibré vertical,

(2) $H_{ua} = (R_a)_* H_u$ $\forall u \in P$, où R_a est la translation à droite définie par l'élement a de G. H se projette ainsi en un sous-fibré vectoriel L de TM. On notera $\mathfrak{J}$ l'idéal des formes différentielles sur M qui s'annulent sur les sections de L.

Definition. Une connexion sur (P, G, M) est dite adaptée à une connexion partielle si l'espace horizontal de la connexion contient le sous-espace de la connexion partielle en chaque point de P.

Definition. Un fibré principal (P, G, M) est dite feuilletée s'il est muni d'une connexion partielle intégrable. Alors la projection de la connexion partielle sur M est aussi intégrable.

Definition. Une connexion adaptée ω sur un fibré principal feuilleté est dite basique si $\theta_A \omega = 0$ quel que soit le champ partiellement horizontal A, θ_A désignant la dérivée de Lie par rapport à A. Cette condition est équivalente à $i_A \Omega = 0$, où Ω est la forme de courbure de ω.

Proposition 1. *Soit (P, G, M) un fibré principal feuillete. Alors pour toute connexion adaptée ω de courbure Ω et pour tout $\alpha \in \mathfrak{g}^*$, on a $\alpha\Omega \in p^*\mathfrak{J} \wedge A(P)$. De plus, ω est basique si et seulement si $\alpha\Omega \in p^* \wedge^2 \mathfrak{J} \wedge A(P)$, p étant la projection de P sur M.*

Communicated by K. Yano, June 9, 1978.

Dans tout le reste du paragraphe, on considère un fibré principal feuilleté (P, G, M). Soit $W(\mathfrak{g}) = \bigwedge \mathfrak{g}^* \otimes S\mathfrak{g}^*$ *lalgèbre* de Weil de $\mathfrak{g}$. Il est muni d'une filtration décroissante définie par

$$F^{2r}W(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{j \geqslant r} \bigwedge \mathfrak{g}^* \otimes S^j\mathfrak{g}^*.$$

De même $A(P)$ possède une filtration définie par $F^rA(P) = p^* \bigwedge^r \mathfrak{J} \wedge A(P)$.

Soit K_ω l'homomorphisme de Weil de $W(\mathfrak{g})$ dans $A(P)$ défini par

$$K_\omega(\alpha) = \alpha\omega \quad \forall \alpha \in \bigwedge^1 \mathfrak{g}^*,$$
$$K_\omega(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha}\Omega \quad \forall \tilde{\alpha} \in S^1\mathfrak{g}^*.$$

K_ω est un homomorphisme de G-algèbres différentielles graduées. De la proposition 1, on déduit

Théorème 1. *L'homomorphisme de Weil préserve les filtrations, i.e.,* $K_\omega : F^{2r}W(\mathfrak{g}) \to F^rA(P)$.
De plus, si ω est basique.

$$K_\omega : F^{2r}W(\mathfrak{g}) \to F^{2r}A(P).$$

Soit q la codimension de L, on a $K_\omega(F^{q+1}W(\mathfrak{g})) = 0$ et dans le cas d'une connexion basique, $K_\omega(F^{2[(q/2)+1]}W(\mathfrak{g})) = 0$. Par suite, si l'on désigne par $W(\mathfrak{g})_k = W(\mathfrak{g})/F^{2(K+1)}W(\mathfrak{g})$, alors K_ω induit un homomorphisme:

$$K_* : H(W(\mathfrak{g})_q) \to H(P),$$

et dans le cas basique, un homomorphisme:

$$K_* : H(W(\mathfrak{g})_{[q/2]}) \to H(P).$$

Enfin, soit H un sus-groupe de G et $W(\mathfrak{g}, H) = W(\mathfrak{g})_H$ les éléments H basiques de $W(\mathfrak{g})$. Alors $\forall k \geqslant 0$, on a

$$W(\mathfrak{g}, H)_k = W(\mathfrak{g}, H)/F^{2(K+1)}W(\mathfrak{g}, H) \cong (W(\mathfrak{g})_k)_H.$$

Soit d'autre part, (P', H, M) une H-réduction de (P, G, M) définie par une section $s : M \to P/H$. K_ω induit un homomorphisme $(K_\omega)_H : W(\mathfrak{g}, H)_q \to (A(P))_H \cong A(P/H)$. La composition de $(K_\omega)_H$ avec $s^* : A(P/H) \to A(M)$ donne un homomorphisme

$$\delta = S^* \circ (K_\omega)_H : W(\mathfrak{g}, H) \to A(M).$$

D'où le théorème suivant dû à F. Kamber et Ph. Tondeur:

Théorème 2. *Soit (P, G, M) un fibré principal feuilleté et soit une H-réduction de ce fibré. Alors il existe un homomorphisme Δ_*, appelé homomorphisme caractéristique généralisé de (P, G, M), de $H(W(\mathfrak{g}, H))$ dans $H(M)$. Cet homomorphisme ne dépend pas de la connexion adaptée choisie dans (P, G, M), mais si cette connexion est basique, alors*

$$\Delta_* : H(W(\mathfrak{g}, H))_{[q/2]} \to H(M).$$

2. Espaces de nullite du tenseur de courbure

Soit (P, G, M) un fibré principal muni d'une connexion ω de courbure Ω. Soit $u \in P$ et $N_u = \{A \in T_uP$ tel que $\Omega(A, B) = 0\ \forall B \in T_uP\}$. Soit $\mu(u) = \dim N_u$. $\mu(u)$ s'appelle l'indice de nullité de Ω au point u. Puisque Ω est différentiable, la fonction μ est semicontinue inférieurement sur P et l'ensemble des points où μ atteint son minimum est un ouvert de P. Comme d'autre part $R_a^*\Omega = \mathrm{Ad}(a^{-1})\Omega$, on a $N_{ua} = R_{a*}N_u\ \forall a \in G$ et μ est constante de long des fibres. Par suite si l'on suppose μ constante sur un ouvert O de P, la restriction de P à $U = p(O)$ est un fibré principal muni d'une connexion partielle définie par la distribution: $u \to N_u \cap H_u$ où $u \to H_u$ est la distribution horizontale qui détermine la connexion ω.

Théorème 3. *On suppose μ constante sur P. Alors la distribution: $u \to N_u$ est complètement intégrable. En particulier le fibré principal (P, G, M) est feuilleté.*

Preuve. Soient $A, B \in \underline{N}$. Si A et B sont verticaux, alors $[A, B] \in \underline{N}$ puisque Ω est semi-basique. Si A et B sont horizontaux, alors quel que soit le champ horizontal C, on a, d'aprés l'identité de Bianchi:

$$0 = D\Omega(A, B, C) = d\omega(A, B, C) = S\{A\Omega(B, C) - \Omega([A, B], C)\}$$

où S désigne la somme cyclique. Cette relation se réduit à

$$0 = -\Omega([A, B], C).$$

Donc $[A, B] \in \underline{N}$.

Si $A = A^*$ est un champ fondamental et si B est horizontal, alors quel que soit le champ horizontal C, on a

$$0 = \Omega(B, C) = d\omega(B, C) + [\omega(B), \omega(C)] = -\omega([B, C]).$$

Donc $[B, C]$ est horizontal, ce qui implique

$$\begin{aligned} d\Omega(A^*, B, C) &= \left(dd\omega + \tfrac{1}{2}d[\omega, \omega]\right)(A^*, B, C) \\ &= S\{A^*[\omega(B), \omega(C)] - [\omega([A^*, B]), \omega(C)]\} = 0. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$d\Omega(A^*, B, C) = S\{A^*\Omega(B, C) - \Omega([A^*, B], C)\} = -\Omega([A^*, B], C)$$

ce qui montre que $[A^*, B] \in \underline{N}$.

Enfin, si A est vertical et B horizontal, on peut écrire $A = \sum_i f_i A_i^*$. Alors

$$\Omega([A, B], C) = \Omega\big(\sum f_i[A_i^*, B], C\big) - \Omega\Big(\sum_i (Bf_i)A_i^*, C\Big) = 0,$$

et on a encore $[A, B] \in N$.

On revient au cas général et on désigne par $\nu(u)$ la dimension de $N_u \cap H_u$ et on pose $\nu_0 = \min_{u\in P} \nu(u)$. Soit (P', H, M) une H-réduction de (P, G, M). On va montrer qu'il existe un homomorphisme d'algèbres $\Delta_* : H(W(\mathfrak{g}, H))_{[(m-\nu_0)/2]} \to H(M)$ où m est la dimension de M. D'après ce qui a été rappelé à propos des théorèmes 1 et 2, il suffit de montrer que

$$K_\omega(F^{2(m-\nu_0/2+1)}W(\mathfrak{g})) = 0$$

et pour cela il suffit de vérifier que

$$K_\omega(\tilde{\alpha}_1 \cdots \tilde{\alpha}_r) = 0 \; \forall r \geqslant \left[\frac{m-\nu_0}{2} + 1\right]$$

et quels que soient les $\tilde{\alpha}_1, \cdots, \tilde{\alpha}_r$ de $S^1\mathfrak{g}^*$. Par définition de ν_0, on a $2r > m - \nu(u)$, $\forall u \in P$. Soit $u \in P$ et $x = p(u)$. Soit d'autre part, L_x la projection de N_u sur M. Soient $X_1, \cdots, X_{m-\nu(u)}, X_{m-\nu(u)+1}, \cdots, X_m$ une base de T_xM telle que $X_{m-\nu(u)+1}, \cdots, X_m$ soient dans L_x. Leurs relèvements horizontaux $X_1^h, \cdots, X_m^h$ et les vecteurs fondamentaux en u constituent une base de T_uP. Soit (θ^i) la base duale. Puisque Ω est semi-basique, $\forall \tilde{\alpha} \in S^1\mathfrak{g}^*$, $\tilde{\alpha}\Omega = \sum_{i,j\leqslant m-\nu(u)} \frac{1}{2} a_{ij}\theta^i \wedge \theta^j$. Il en résulte que $K_\omega(\tilde{\alpha}_1, \cdots, \tilde{\alpha}_r) = 0$ si $r > [(m - \nu_0)/2]$. On obtient ainsi le

Théorème 4. *Soit (P, G, M) un fibré principal muni d'une connexion ω et soit ν_0 le minimum des dimensions des espaces de nullité horizontaux de Ω. Soit d'autre part (P', H, M) une H-réduction de (P, G, M), alors il existe un homomorphisme $\Delta_* : H(W(\mathfrak{g}, H))_{[(m-\nu_0)/2]} \to H(M)$.*

La démonstration du théorème précédent nous fournit en même temps le

Théorème 5. *Soit (P, G, M) un fibré principal muni d'une connexion ω. Alors les classes de Pontrjagin de P sont nulles en dimension supérieure à $m - \nu_0$.*

Comme application de ce théorème, on considère une variété riemannienne compacte (M, g) de dimenson m. Soit $(\mathfrak{R}_0, O(m), M)$ le fibré principal des repères orthonormés de (M, g) muni de sa connexion riemannienne ω dont on désigne par Ω et R la forme et le tenseur de courbure. On a [3]

$$(R(X, Y)Z)(x) = u(\Omega_u(\tilde{X}, \tilde{Y})^*(u^{-1}Z)),$$

où $x = p(u)$, $u^{-1}Z$ est la G-fonction sur $\mathfrak{R}_0$ correspondant à Z, et $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ sont des champs projetables sur $\mathfrak{R}_0$ ayant pour projection X et Y. Cette formule montre que l'espace de nullité de Ω au point u se projette sur l'espace de nullité de R au point $x = p(u)$. D'après Chern et Kuiper [1], si l'indice de nullité $\nu(x) \geqslant k$ en tout point x de M, alors la variété (M, g) ne peut être isométriquement immergée dans $\mathbf{R}^{m+k-1}$. On a donc le

Théorème 6. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension m. Alors les classes de Pontrjagin non nulles en dimenson supérieure à $m - k$ sont des obstructions à une immersion isométrique de (M, g) dans $\mathbf{R}^{m+k-1}$.*

3. Cas du fibre des reperes

Soit M une variété différentiable de dimension m, munie d'une connexion linéaire ω de courbure Ω. Soit $(\mathfrak{R}, Gl(m, \mathbf{R}), M)$ le fibré principal des repères de M. La donnée de ω est équivalence à celle d'une forme vectorielle Γ sur $\mathfrak{R}$ telle que $R_{a*} \circ \Gamma = \Gamma \circ R_{a*}$, $\forall a \in GL(m, \mathbf{R})$. Dans [2], on a introduit une autre forme de courbure $\hat{\Omega}$ qui est une 2-forme vectorielle sur $\mathfrak{R}$, et on a montré que

$$\hat{\Omega} = -[\Gamma, \Gamma],$$

où $[\Gamma, \Gamma]$ est le crochet de 2-formes vectorielles. Soient X et $Y \in \mathfrak{X}(M)$, et X^h et Y^h leurs relèvements horizontaux. On a [2]

$$[X^h, Y^h] = [X, Y]^h + \hat{\Omega}(X^h, Y^h). \tag{1}$$

Entre Ω et $\hat{\Omega}$, il existe la relation suivante:

$$\Omega = \omega \circ \hat{\Omega}.$$

Il en résulte que les espaces de nullité de Ω et $\hat{\Omega}$ en chaque point de $\mathfrak{R}$ coïncident puisque la restriction de ω à chaque espace vertical est un isomorphisme.

Toujours dans [2], on a montré que Γ induit une connexion linéaire $\bar{\Gamma}$ sur le fibré vertical $V\mathfrak{R}$, connexion caractérisée par

$$\bar{D}_B A = \Gamma([B, A]),$$

où B est un champ horizontal, et A un champ vertical. D'autre part, la restriction de p_* à $H\mathfrak{R}$ est un morphisme de fibrés vectoriels qui est un isomorphisme sur les fibrés; $p_{*|H\mathfrak{R}}: H\mathfrak{R} \to TM$. Par suite, la connexion linéaire ∇ sur M induit une connexion linéaire $\bar{\bar{\Gamma}}$ sur $H\mathfrak{R}$. Comme $T\mathfrak{R} = V\mathfrak{R} \oplus H\mathfrak{R}$, il existe sur la variété $\mathfrak{R}$ une connexion linéaire $\tilde{\Gamma}$ caractérisée par

$$\tilde{D}_{X^h}Y^h = \bar{\bar{D}}_{X^h}Y^h = (\nabla_X Y)^h \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$
$$\tilde{D}_{X^h}A^* = \bar{D}_{X^h}A^* = [X^h, A^*] = 0,$$
$$\tilde{D}_{A^*}X^h = \bar{\bar{D}}_{A^*}X\mathbf{u} = 0,$$

où A^* est un champ fondamental.

Soient $\tilde{T}$ et $\tilde{R}$ les tenseurs de torsion et de courbure de $\tilde{\Gamma}$, T et R ceux de ∇. En tenant compte de (1), on trouve

$$\tag{2} \begin{aligned} \tilde{T}(X^h, Y^h) &= (T(X, Y))^h + \hat{\Omega}(X^h, Y^h),\\ \tilde{T}(X^h, A^*) &= 0,\\ \tilde{R}(X^h, Y^h)Z^h &= (R(X, Y)Z)^h,\\ \tilde{R}(X^h, Y^h)A^* &= \tilde{D}_{\hat{\Omega}(X^h, Y^h)}A^*. \end{aligned}$$

D'autre part, entre $\tilde{T}$ et $\tilde{R}$ il existe des relations suivantes, connues sous le nom d'identités de Bianchi [5]:

$$\tag{3} \begin{aligned} S\{\tilde{R}(A, B)C\} &= S\{\tilde{T}(\tilde{T}(A, B), C) + \tilde{D}_A\tilde{T}(B, C)\},\\ S\{\tilde{D}_A\tilde{R}(B, C) &+ \tilde{R}(\tilde{T}(A, B), C)\} = 0, \end{aligned}$$

où $A, B, C \in \mathfrak{X}(\mathfrak{R})$.

Proposition 2. *Quels que soient les champs horizontaux A, B, C sur $\mathfrak{R}$, on a*

$$S\{\hat{\Omega}(\tilde{T}(A, B), C) + \tilde{D}_A\hat{\Omega}(B, C)\} = 0.$$

Preuve. Il suffit de faire la démonstration pour $A = X^h$, $B = Y^h$, $C = Z^h$. A partir de la relation:

$$\tilde{T}(X^h, Y^h) = (T(X, Y))^h + \hat{\Omega}(X^h, Y^h)$$

on obtient

$$\tag{4} \tilde{T}(\tilde{T}(X^h, Y^h), Z^h) = (T(T(X, Y), Z)^h + \hat{\Omega}((T(X, Y))^h, Z^h))$$

$$\tag{5} \begin{aligned} \tilde{D}_{Z^h}\tilde{T}(X^h, Y^h) &= \tilde{D}_{Z^h}(\tilde{T}(X^h, Y^h) - \tilde{T}(\tilde{D}_{Z^h}X^h, Y^h) - \tilde{T}(X^h, \tilde{D}_{Z^h}Y^h))\\ &= \nabla_Z(T(X, Y))^h\\ &\quad + \tilde{D}_{Z^h}(\hat{\Omega}(X^h, Y^h) - \tilde{T}((\nabla_Z x)^h, Y^h) - \tilde{T}(X^h, (\nabla_Z Y)^h))\\ &= (\nabla_Z T(X, Y))^h + \tilde{D}_{Z^h}\hat{\Omega}(X^h, Y^h), \end{aligned}$$

et la formule à établir découle alors de (2), (4), (5) et des identités de Bianchi (3).

Théorème 7. *On suppose l'indice de nullité constant sur $\mathfrak{R}$. Alors chaque feuille du feuilletage défini par la distribution: $u \to N_u$ est totalement géodésique.*

Preuve. On sait qu'une sous-variété d'une variété munie d'une connexion linéaire est totalement géodésique si cette sous-variété est auto-parallèle. Pour montrer feuille soit totalement géodésique, il suffit de montrer que $\tilde{D}_A B \in \underline{N}$, $\forall A, B \in \underline{N}$.

Si B est vertical, quel que sit de champ de vecteurs A: $\tilde{D}_A B = \overline{D}_A B$ est vertical, donc $\tilde{D}_A B \in \underline{N}$. Si B est horizontal et A est vertical, on a d'aprés (2): $\tilde{T}(A, B) = 0$. Par suite, quel que sit C:

$$\Omega(\tilde{D}_A B, C) = \Omega(\tilde{D}_B A, C) + \Omega([A, B], C) = 0,$$

puisque $[A, B] \in \underline{N}$. Donc $\tilde{D}_A B \in \underline{N}$.

Enfin si A et B horizontaux et C quelconque, de la relation:

$$\tilde{D}_B(\hat{\Omega}(A, C)) = 0,$$

on tire

$$\tilde{D}_B \hat{\Omega}(A, C) = -\hat{\Omega}(\tilde{D}_B A, C),$$

soit

$$\tilde{D}_B \hat{\Omega}(A, C) = -\hat{\Omega}(\tilde{T}(B, A), C) - \hat{\Omega}(\tilde{D}_A B, C) - \hat{\Omega}([B, C], A).$$

Par suite,

$$\tilde{D}_B \hat{\Omega}(A, C) + \hat{\Omega}(\tilde{T}(B, A, C) = -\hat{\Omega}(\tilde{D}_A B, C)).$$

D'après la proposition 2, il vient

$$S\{\hat{\Omega}(\tilde{D}_A B, C) = 0,\}$$

relation qui se réduit en fait à $\hat{\Omega}(\tilde{D}_A B, C) = 0$. Ainsi $\tilde{D}_A B \in \underline{N}$.

Remarque. Dans le cas général d'un fibré principal (P, G, M) muni d'une connexion ω, si la base M est elle-même pourvue d'une connexion linéaire $\tilde{\nabla}$, alors ω et ∇ induisent sur la variété P une connexion linéaire $\tilde{\nabla}$ qui possèdent les mêmes propriétés que la connexion $\tilde{D}$ sur la variété des repères $\mathfrak{R}$ [2]. Il en résulte que les feuilles tangentes aux espaces de nullité de Ω sont encore totalement géodésiques par rapport à $\tilde{\nabla}$.

4. Espaces de nullite horizontaux sur un espace symetrique

Soit (G, H, σ) un espace symétrique; autrement dit, on a un groupe de Lie connexe G, un sous-groups fermé H de G et σ un automorphisme involutif de G tel que H soit compris entre le sous-groupe H^σ des éléments de G invariants par σ et la composante neutre de H^σ. Soit $\mathfrak{m}$ le sous-espaces vectoriel de $\mathfrak{g}$ constitué par des vecteurs propres correspondant à la valeur propre -1 de σ_*. On a les relations suivantes:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}, && \mathfrak{h} \cap \mathfrak{m} = \{0\}, \\ &[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}, && \mathrm{Ad}(H)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}, \\ &[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}, && [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}. \end{aligned}$$

Par suite (G, H) est un couple réductif, et il existe donc sur le fibré principal $(G, H, G/H)$ une connexion, appelée connexion canonique, invariante par les translations à gauche et dont la forme de courbure est donnée par

$$\Omega(A, B) = -[A, B] \quad \forall A, B \in \mathfrak{m}.$$

Il en résulte que la dimension des espaces de nullité de Ω est constante sur G. On s'intéresse en particulier aux espaces de nullité horizontaux. Au cours de la démonstration du théorème 3, on a vu que la distribution définie par les espaces de nullité horizontaux est aussi intégrable.

Soit $\mathfrak{n} = N_e \cap \mathfrak{m}$ où e est l'élément neutre de G. Si $A \in \mathfrak{n}$ et $B \in \mathfrak{m}$, on a $[A, B] = 0$. Ainsi

$$[\mathfrak{n}, \mathfrak{m}] = 0. \tag{6}$$

Par conséquent, $\mathfrak{n}$ est une sous-algèbre de Lie abélienne de $\mathfrak{g}$. On va montrer que $\mathfrak{n}$ est en fait un idéal de $\mathfrak{g}$. Il suffit pour cela de montrer que $[A, B] \in \mathfrak{n}$ si $A \in \mathfrak{n}$ et $B \in \mathfrak{h}$. Soit $C \in \mathfrak{m}$, on a

$$\Omega([A, B], C) = -[[A, B], C] = [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0.$$

Donc $[A, B] \in \mathfrak{n}$ puisque $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$.

$\mathfrak{n}$ est le plus grand idéal abélien de $\mathfrak{g}$ contenu dans $\mathfrak{m}$ et vérifiant (6). En effet, si $\mathfrak{n}_1$ est un idéal abélien de $\mathfrak{g}$ contenu dans $\mathfrak{m}$ et tel que $[\mathfrak{n}_1, \mathfrak{m}] = 0$, on aura, $\forall A \in \mathfrak{n}_1$ et $\forall B \in \mathfrak{m}$,

$$\Omega(A, B) = -[A, B] = 0,$$

donc $A \in \mathfrak{n}$.

Proposition 3. *Soit F la feuille du feuilletage défini par $\mathfrak{n}$ qui passe par l'élément neutre. Alors F est un sous-groupe distingué, abélien et fermé de G.*

Preuve. Il reste à montrer que F est fermé dans G. Soient $\bar{F}$ l'adhérence de F, et $\mathfrak{f}$ son algèbre de Lie. $\bar{F}$ est un sus-groupe distingué, abélien, connexe de G. Donc $\mathfrak{f}$ est un idéal abélien de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{f} \supset \mathfrak{n}$. D'autre part,

$$\sigma_*(A) = -A \quad \forall A \in \mathfrak{n}.$$

Comme F est connexe, on a

$$\sigma(a) = a^{-1} \quad \forall a \in F.$$

Puisque $\bar{F}$ est l'adhérence de F:

$$\sigma(a) = a^{-1} \quad \forall a \in \bar{F}.$$

Il en résulte que

$$\sigma_*(A) = -A \quad \forall A \in \mathfrak{f},$$

donc $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{m}$ et par suite $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{n}$. Ainsi $\bar{F} = F$.

La distribution définie par les espaces de nullité horizontaux étant invariante par les translations à gauche, on a le

Théorème 8. *Les feuilles tangentes aux espaces de nullité horizontaux sont des fermés.*

References

[1] S. S. Chern & N. Küiper, *Some theorems on the isometric imbedding of compact Riemannian manifolds in Euclidean spaces*, Ann. of Math. **56** (1952) 422–430.

[2] Tong van Duc, *Sur la géométrie différentielle des fibrés vectoriels*, Kodai Math. Sem. Rep. **26** (1975) 349–408.

[3] K. Kamper & Ph. Tondeur, *Foliated bundles and characteristic classes*, Lecture Notes in Math. Vol. 493, Springer, Berlin, 1975.

[4] R. Maltz, *The nullity spaces of the curvature operator*, Cahiers Topologie Géométrie Différentielle **8** (1966) 1–20.

[5] K. Nomizu, *Lie groups and differential geometry*, Math. Soc. Japan, 1956.

UNIVERSITE DE GRENOBLE I